

Propagação & Antenas

Docente Responsável:

Prof. Carlos R. Paiva

Duração: 3 horas

28 de Janeiro de 2019

Ano Lectivo: 2018 / 2019

SEGUNDO EXAME

1. (Neste problema considere unidades geométricas em que $c=1$, com o tempo medido em anos e o espaço em anos-luz.) Alice $\mapsto (x', t')$ e Bob $\mapsto (x, t)$ são gémeos. Quando ambos fazem 30 anos de idade, Alice inicia ($t = t' = 0$) uma viagem de ida-e-volta ao planeta X. Aquando do reencontro (na Terra) a idade de Bob é de 40 anos. A velocidade relativa de Alice (tanto na ida como na volta) é $\beta = 4/5$. Cada gémeo combina enviar ao outro sinais electromagnéticos sempre que cada um deles completa mais um ano de idade. Acompanhe, sempre, a sua resolução com os diagramas de Minkowski pertinentes.
- Determine a distância entre a Terra e o planeta X quer do ponto de vista de Bob quer do ponto de vista de Alice. Que idades têm os dois gémeos aquando do reencontro?
 - Do ponto de vista de Bob: (i) quanto foram os sinais enviados? (ii) quantos foram os sinais recebidos (emitidos por Alice) na viagem de ida e (iii) na viagem de volta? (iv) que conclusão tira ele sobre o envelhecimento de Alice? Indique, na linha de universo de Alice, a idade que esta tem quando envia cada sinal para Bob.
 - Do ponto de vista de Alice: (i) quanto foram os sinais enviados? (ii) quantos foram os sinais recebidos (emitidos por Bob) na viagem de ida e (iii) na viagem de volta? (iv) que conclusão tira ela sobre o envelhecimento de Bob? Acompanhe a sua resposta com o diagrama de Minkowski correspondente. Indique, na linha de universo de Bob, a idade que este tem quando envia cada sinal para Alice.

Solução

- a) Seja L a distância, do ponto de vista de Bob, entre a Terra e o planeta X. Então, tem-se

$$\boxed{T=10} \Rightarrow \boxed{L = \beta \frac{T}{2}} \Rightarrow \boxed{L=4}.$$

Como

$$\boxed{\beta = \frac{4}{5}} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{5}{3}},$$

a duração total da viagem de ida-e-volta, do ponto de vista de Alice, é

$$\boxed{T' = \frac{T}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{T' = 6}.$$

Aquando do reencontro, as idades de cada gémeo serão, então,

$$\left[\begin{array}{l} \text{Bob} \mapsto 30 + 10 = \boxed{40} \\ \text{Alice} \mapsto 30 + 6 = \boxed{36} \end{array} \right.$$

A distância percorrida, do ponto de vista de Alice foi, além disso,

$$\boxed{T' = 6} \Rightarrow \boxed{L' = \beta \frac{T'}{2}} \Rightarrow \boxed{L' = \frac{12}{5} = 2.4}.$$

Esta distância está de acordo com a contracção do espaço, i.e.,

$$\boxed{L' = \frac{L}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{L' = \frac{12}{5} = 2.4}.$$

b) Devido ao efeito Doppler, a frequência dos sinais recebidos na viagem de ida é

$$f' = \frac{f}{\kappa} = \frac{1}{3},$$

Enquanto que a frequência dos sinais recebidos na viagem de volta é

$$f'' = \kappa f = 3.$$

Usou-se, aqui, o factor κ de Bondi, dado por

$$\kappa = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 3.$$

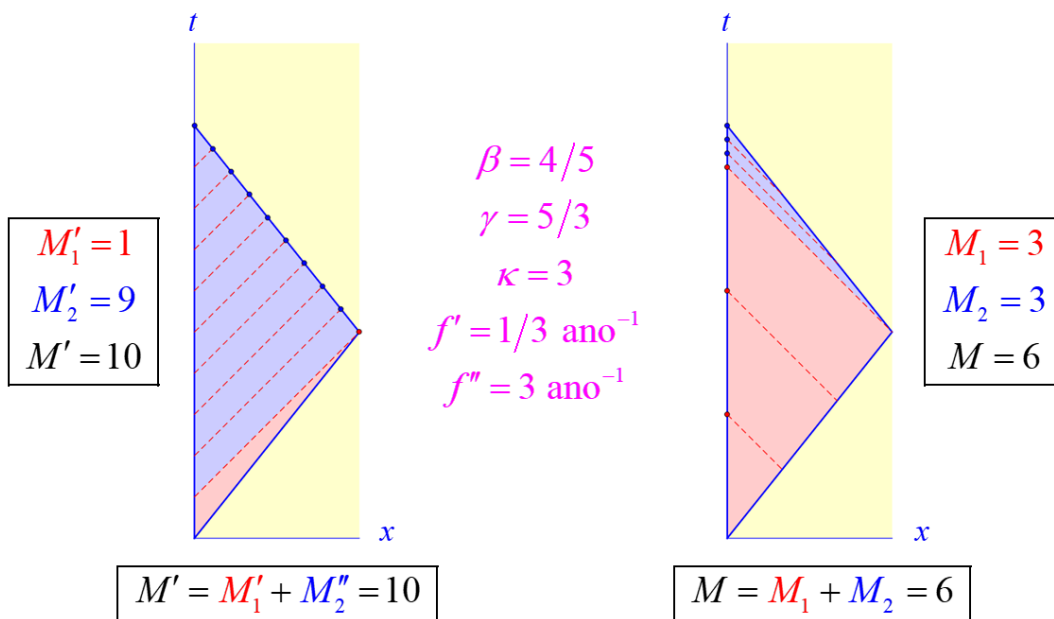
Assim, do ponto de vista de Bob, tem-se

$$\begin{array}{l}
 N = fT = 10 \\
 t_1 = \frac{L}{\beta}(1 + \beta) = 9 \\
 M_1 = f't_1 = \frac{fL'}{\beta} = 3 \\
 \boxed{T = 10} \quad \mapsto \quad t_2 = \frac{L}{\beta}(1 - \beta) = 1 \\
 M_2 = f''t_2 = \frac{fL''}{\beta} = 3 \\
 M = M_1 + M_2 = N' = 6 \\
 T_x = \frac{M}{f} = \frac{N'}{f} = T' = 6
 \end{array}$$

c) Assim, do ponto de vista de Alice , tem-se

$$T' = 6 \mapsto$$

$$\begin{aligned}
 N' &= f T' = 6 \\
 t'_1 &= \frac{L'}{\beta} = 3 \\
 M'_1 &= f' t'_1 = \frac{f L}{\beta} (1 - \beta) = 1 \\
 t'_2 &= t'_1 = 3 \\
 M'_2 &= f'' t'_2 = \frac{f L}{\beta} (1 + \beta) = 9 \\
 M' &= M'_1 + M'_2 = N = 10 \\
 T'_x &= \frac{M'}{f} = \frac{N}{f} = T = 10
 \end{aligned}$$



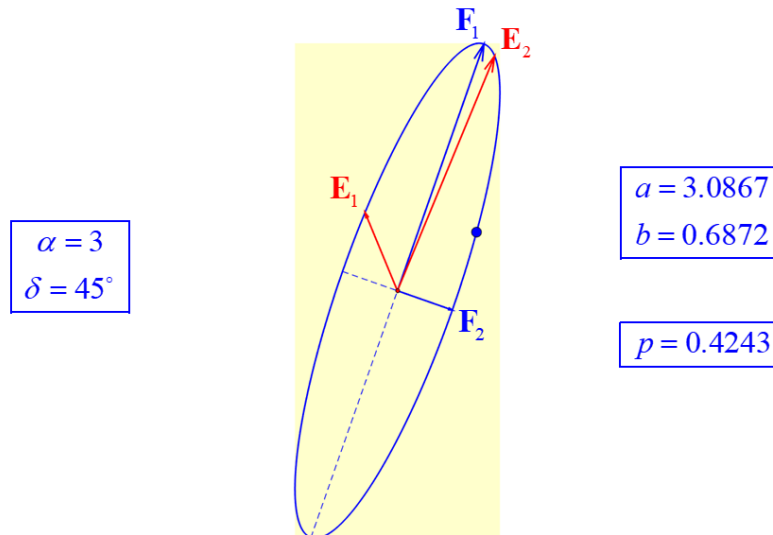
2. Uma onda electromagnética plana e monocromática é caracterizada pelo vector complexo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i \mathbf{E}_2 \in \mathbb{C}^3$ ($\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \in \mathbb{R}^3$). Tem-se, portanto, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \}$. Note que, tratando-se de uma onda TEM, é $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Considere que $\mathbf{E}_1 = \mathcal{E} \mathbf{f}$, $\mathbf{E}_2 = \alpha \mathcal{E} \mathbf{g}$, $\mathcal{E} > 0$, $\alpha \geq 0$ e $\mathbf{f}^2 = \mathbf{g}^2 = 1$ com $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \cos(\delta)$. Caracterize **completamente** a polarização admitindo que $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f} = -\gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2$, $\mathbf{g} = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \gamma_2 \mathbf{e}_2$, $\gamma_1 = \sin(\delta/2)$ e $\gamma_2 = \cos(\delta/2)$. Considere os seguintes casos: (i) $\alpha = 3$ e $\delta = 45^\circ$; (ii) $\alpha = 2$ e $\delta = 180^\circ$; (iii) $\alpha = 1$ e $\delta = 90^\circ$. Represente graficamente, para cada caso, a elipse («lato sensu») orientada que corresponde ao vector complexo \mathbf{E}_0 bem como os vectores reais relevantes.

Solução

(i) $\alpha = 3$ e $\delta = 45^\circ$

Polarização elíptica esquerda

Polarização elíptica esquerda



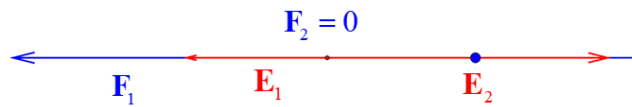
(ii) $\alpha = 2$ e $\delta = 180^\circ$

Polarização linear

Polarização linear horizontal

$$\alpha = 2$$

$$\delta = 180^\circ$$



$$a = 2.2361$$

$$b = 0$$

$$p = 0$$

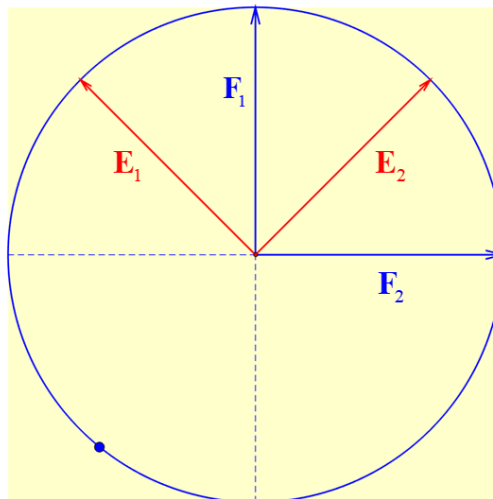
(iii) $\alpha = 1$ e $\delta = 90^\circ$

Polarização circular

Polarização circular esquerda

$$\alpha = 1$$

$$\delta = 90^\circ$$



$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$p = 1$$

3. Num sistema de comunicação óptica digital, com fibras monomodais operadas no regime linear, cada impulso correspondente a um bit “1” pode ser modelado como um impulso gaussiano com trinado (ou «chirp») C cuja largura temporal RMS, à entrada, é σ_0 . Para um troço de comprimento L a correspondente largura RMS, à saída, é σ_1 . Sendo $\tau_0 = \sqrt{|\beta_2|L}$ (em que β_2 é o coeficiente de dispersão da velocidade de grupo na portadora), definem-se $\chi_1 = \sigma_1^2/\tau_0^2$ e $\chi = \sigma_0^2/\tau_0^2$. Nestas condições, tem-se

$$\left[\begin{array}{l} a^2 = \frac{\beta_3^2}{|\beta_2|^3 L} \\ p = \frac{1}{4}(1+C^2) \end{array} \right. \rightarrow \left. \chi_1 = \text{sgn}(\beta_2) C + \chi_0 + \frac{p}{\chi_0} \left(1 + a^2 \frac{p}{2\chi_0} \right) \right].$$

- a) Para $\beta_2 = -2 \text{ ps}^2/\text{km}$, $\beta_3 = 0 \text{ ps}^3/\text{km}$ e $L = 40 \text{ km}$, determine o valor máximo do débito binário e represente, nesse caso, o andamento da função $\sigma^2(\xi)/\sigma_0^2$ para $0 \leq \xi \leq 1$, com $\xi = z/L$.
- b) Repita a alínea anterior para $\beta_2 = -2 \text{ ps}^2/\text{km}$, $\beta_3 = 5 \text{ ps}^3/\text{km}$ e $L = 40 \text{ km}$.

Solução

Tem-se, em geral,

$$\boxed{X(\xi) = \chi_0 + \text{sgn}(\beta_2) C \xi + \frac{p}{\chi_0} \left(1 + a^2 \frac{p}{2\chi_0} \right) \xi^2}.$$

Em particular, vem

$$\left[\begin{array}{l} \text{entrada} \mapsto \xi = 0 \mapsto \chi_0 = X(0), \\ \text{saída} \mapsto \xi = 1 \mapsto \chi_1 = X(1) = \chi_0 + \text{sgn}(\beta_2) C + \frac{p}{\chi_0} \left(1 + a^2 \frac{p}{2\chi_0} \right). \end{array} \right.$$

A optimização corresponde a fazer-se

$$\boxed{\frac{d\chi_1}{d\chi_0} = 0} \Rightarrow \boxed{\chi_0^3 - p\chi_0 - a^2 p^2 = 0}.$$

Define-se, ainda, no caso geral

$$\mu(\xi) = \frac{X(\xi)}{\chi_0} = 1 + \frac{\text{sgn}(\beta_2) C}{\chi_0} \xi + \frac{p}{\chi_0^2} \left(1 + a^2 \frac{p}{2\chi_0} \right) \xi^2.$$

Assim, em particular, obtém-se

$$\left[\begin{array}{l} \text{entrada} \mapsto \xi = 0 \mapsto \mu_0 = \mu(0) = 1, \\ \text{saída} \mapsto \xi = 1 \mapsto \mu_1 = \mu(1) = 1 + \frac{\text{sgn}(\beta_2) C}{\chi_0} + \frac{p}{\chi_0^2} \left(1 + a^2 \frac{p}{2\chi_0} \right). \end{array} \right.$$

a) Considera-se, nesta alínea, o caso em que

$$\beta_3 = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow X(\xi) = \chi_0 + \text{sgn}(\beta_2) C \xi + \frac{p}{\chi_0} \xi^2.$$

Em particular, vem

$$\left[\begin{array}{l} \text{entrada} \mapsto \xi = 0 \mapsto \chi_0 = X(0), \\ \text{saída} \mapsto \xi = 1 \mapsto \chi_1 = X(1) = \chi_0 + \text{sgn}(\beta_2) C + \frac{p}{\chi_0}. \end{array} \right.$$

A otimização corresponde a fazer-se

$$\frac{d\chi_1}{d\chi_0} = 0 \Rightarrow \chi_0^3 - p\chi_0 = 0 \Rightarrow \chi_0^{\text{opt}} = \sqrt{p} = \frac{1}{2} \sqrt{1+C^2}.$$

Define-se, ainda, no caso geral

$$\mu(\xi) = \frac{X(\xi)}{\chi_0} = 1 + \frac{\text{sgn}(\beta_2) C}{\chi_0} \xi + \frac{p}{\chi_0^2} \xi^2.$$

Assim, em particular, obtém-se

$$\left[\begin{array}{l} \text{entrada} \mapsto \xi = 0 \mapsto \mu_0 = \mu(0) = 1, \\ \text{saída} \mapsto \xi = 1 \mapsto \mu_1 = \mu(1) = 1 + \frac{\text{sgn}(\beta_2) C}{\chi_0} + \frac{p}{\chi_0^2}. \end{array} \right.$$

Depois da otimização, vem

$$X^{\text{opt}}(\xi) = \text{sgn}(\beta_2) C \xi + \frac{1}{2} \sqrt{1+C^2} (1+\xi^2)$$

e, ainda,

$$\mu^{\text{opt}}(\xi) = 1 + \frac{2\text{sgn}(\beta_2) C}{\sqrt{1+C^2}} \xi + \xi^2,$$

$$\chi_1^{\text{opt}} = X^{\text{opt}}(1) = \text{sgn}(\beta_2) C + \sqrt{1+C^2}.$$

Em particular, tem-se

$$\mu_1^{\text{opt}} = \mu^{\text{opt}}(1) = 2 \left[1 + \frac{\text{sgn}(\beta_2) C}{\sqrt{1+C^2}} \right].$$

Designa-se por valor crítico do trinado (ou “chirp”) o parâmetro $C = C_{\text{cr}}$ tal que

$$\mu_1^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) = 1 \Rightarrow \text{sgn}(\beta_2) C_{\text{cr}} = -\frac{1}{2} \sqrt{1+C_{\text{cr}}^2} \Rightarrow C_{\text{cr}} = -\frac{\text{sgn}(\beta_2)}{\sqrt{3}}.$$

Para este valor crítico, a optimização conduz a

$$X^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - \xi + \xi^2) \Rightarrow \chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) = \chi_1^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

com

$$\mu^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}) = 1 - \xi + \xi^2.$$

Note-se, por fim, que

$$\sigma^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}) = \tau_0 \sqrt{X^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}})} = \frac{\sqrt{|\beta_2| L}}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{1 - \xi + \xi^2}$$

tendo-se, em particular,

$$\sigma_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) = \sigma_1^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) = \frac{\sqrt{|\beta_2|L}}{\sqrt[4]{3}}.$$

O débito binário ou “bit rate” da ligação por fibra óptica é B , tal que

$$B = \frac{1}{T_B},$$

em que T_B é o “time slot” alocado a cada bit da transmissão digital. A regra prática que é costume seguir é, então, a seguinte:

$$\sigma_{\text{max}} < \frac{T_B}{4} = \frac{1}{4B} \Rightarrow B < B_0 = \frac{1}{4\sigma_{\text{max}}}.$$

Como se tem

$$\sigma_{\text{max}} = \max \left\{ \sigma^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}) \right\} = \frac{\sqrt{|\beta_2|L}}{\sqrt[4]{3}},$$

infere-se, finalmente, que

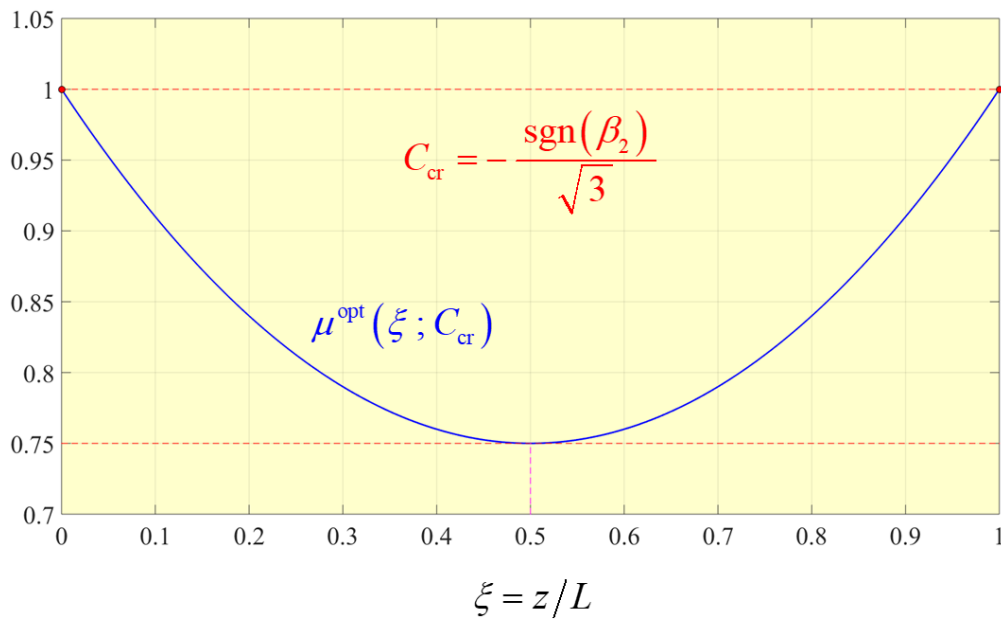
$$B_0 = \frac{\sqrt[4]{3}}{4\tau_0} = \frac{\sqrt[4]{3}}{4} \frac{1}{\sqrt{|\beta_2|L}}.$$

Infere-se, assim, que

$$\begin{array}{|l} \beta_2 = -2 \text{ ps}^2/\text{km} \\ L = 40 \text{ km} \end{array} \Rightarrow C_{\text{cr}} = 0.5774 \Rightarrow B_0 = 36.7854 \text{ Gb} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Note-se, para terminar, que

$$\left[\frac{\sigma^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}})}{\sigma_0^{\text{opt}}} \right]^2 = \mu^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}) = 1 - \xi + \xi^2.$$



b) Vejamos, agora, o caso em que não se despreza a dispersão de ordem superior, i.e.,

$$\beta_3 \neq 0 .$$

Neste caso começa-se por calcular o parâmetro

$$a^2 = \frac{\beta_3^2}{|\beta_2|^3 L} .$$

A tarefa seguinte consiste em determinar o valor crítico do trinado – o parâmetro C_{cr} . Ora, tem-se

$$\mu^{\text{opt}}(\xi) = 1 + \frac{\text{sgn}(\beta_2) C}{\chi_0^{\text{opt}}} \xi + \frac{1 + C^2}{4 [\chi_0^{\text{opt}}]^2} \left(1 + a^2 \frac{1 + C^2}{8 \chi_0^{\text{opt}}} \right) \xi^2 ,$$

pelo que

$$\mu^{\text{opt}}(\xi = 1; C_{cr}) = \mu_1^{\text{opt}}(C_{cr}) = 1 ,$$

donde se tira que

$$32 \operatorname{sgn}(\beta_2) C_{\text{cr}} \left[\chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) \right]^2 + 8(1 + C_{\text{cr}}^2) \chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) + a^2 (1 + C_{\text{cr}}^2)^2 = 0.$$

Porém, nesta equação deve ter-se em consideração que

$$a_{\text{cr}}^2 = \frac{4}{3 \sqrt{3(1 + C_{\text{cr}}^2)}},$$

$$\begin{cases} \chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) = \sqrt{\frac{1 + C_{\text{cr}}^2}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{9a^2}{4} \sqrt{\frac{1 + C_{\text{cr}}^2}{3}} \right) \right], & a^2 \leq a_{\text{cr}}^2 \\ \chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) = \sqrt{\frac{1 + C_{\text{cr}}^2}{3}} \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{9a^2}{4} \sqrt{\frac{1 + C_{\text{cr}}^2}{3}} \right) \right], & a^2 \geq a_{\text{cr}}^2 \end{cases}$$

No caso particular (analisado na alínea anterior) tinha-se $a = 0$, donde

$$\chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) = \sqrt{\frac{1 + C_{\text{cr}}^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{\text{cr}}^2}$$

$$\therefore C_{\text{cr}} = -\frac{\operatorname{sgn}(\beta_2)}{\sqrt{3}},$$

tal como se tinha visto na alínea anterior. Então, uma vez calculado numericamente C_{cr} , há que determinar

$$\mu^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}) = 1 + \frac{\operatorname{sgn}(\beta_2) C_{\text{cr}}}{\chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}})} \xi + \frac{1 + C_{\text{cr}}^2}{4 \left[\chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) \right]^2} \left(1 + a^2 \frac{1 + C_{\text{cr}}^2}{8 \chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}})} \right) \xi^2.$$

Por exemplo: quando $a = 0$ vem

$$\mu^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}) = 1 - \xi + \xi^2,$$

tal como se viu na alínea anterior. No caso geral, terá de se escrever

$$X^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}) = \chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}}) \mu^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}).$$

Por fim, vem

$$\sigma^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}}) = \tau_0 \sqrt{X^{\text{opt}}(\xi; C_{\text{cr}})},$$

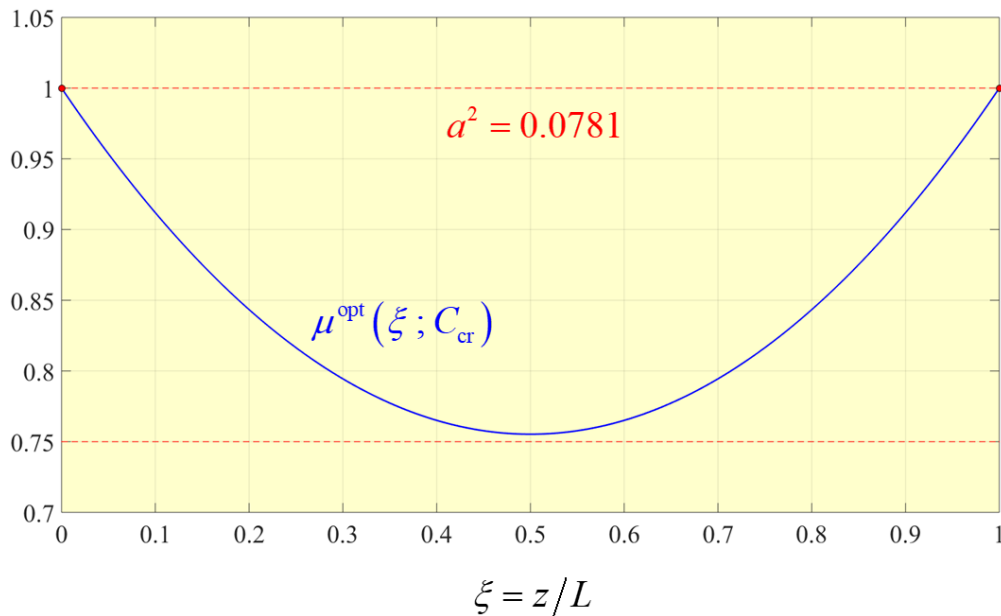
donde

$$B_0 = \frac{1}{4\sigma_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}})} = \frac{1}{4\sqrt{|\beta_2|}L} \frac{1}{\sqrt{\chi_0^{\text{opt}}(C_{\text{cr}})}}.$$

Assim, vem:

$$\begin{array}{|l} \beta_2 = -2 \text{ ps}^2/\text{km} \\ \beta_3 = 5 \text{ ps}^3/\text{km} \\ L = 40 \text{ km} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l} a^2 = 0.0781 \\ C_{\text{cr}} = 0.5775 \end{array} \Rightarrow \boxed{B_0 = 36.3888 \text{ Gb} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

Na figura anexa seguinte apresenta-se a evolução, ao longo da fibra, da largura normalizada do impulso para o valor crítico do trinado.



4. Pretende-se sintetizar um agregado linear de $N=4$ antenas com um desfasamento progressivo $\alpha=0$ das correntes de alimentação e um espaçamento uniforme d entre elementos. Tem-se (coordenadas esféricas) $u = k_0 d \cos(\psi) - \alpha$. No plano equatorial, em que $\theta = \pi/2$, é $\psi = \phi \in [0, 2\pi[$. Para uma excitação simétrica da forma 1:A:A:1, é possível escrever o diagrama

de potência $P(\xi)$ em termos de uma única constante c_0 . Note que o factor do agregado pode ser escrito na forma $F(u) = (1 + e^{-iu})(1 + c_0 e^{-iu} + e^{-2iu})$, tendo-se $\mathcal{F}(u) = |F(u)| = \sqrt{P(u)}$.

- Determine a relação entre A e c_0 . Para um valor $\text{SLL} = -20 \log_{10}(R)$, com $R = 1.25$, determine, $P(\xi)$ e represente graficamente esta função para $-2 \leq \xi \leq 2$. Assinale os pontos notáveis.
- Sejam $\mathcal{F}_{\text{front}} = \mathcal{F}(\phi = 0^\circ)$ e $\mathcal{F}_{\text{rear}} = \mathcal{F}(\phi = 180^\circ)$. Pretende-se obter $\mathcal{F}_{\text{front}} = \mathcal{F}_{\text{rear}} = 1$. Determine, nestas condições, o valor de d/λ e o domínio visível $u_1 \leq u \leq u_2$.
- Desenhe a função $\mathcal{F}(u)$ no intervalo $-\pi \leq u \leq \pi$ e assinale o domínio visível. Desenhe, então, o diagrama de radiação $\mathcal{F}(u)$ no plano equatorial em coordenadas polares. Determine os máximos locais bem como os nulos do diagrama de radiação.

Solução

- Notemos, em primeiro lugar, que se tem

$$F(u) = 1 + A e^{-iu} + A e^{-2iu} + e^{-3iu}$$

e, por outro lado,

$$F(u) = 1 + (1 + c_0) e^{-iu} + (1 + c_0) e^{-2iu} + e^{-3iu}$$

de modo que

$$\boxed{A = 1 + c_0}.$$

Definindo, então,

$$\boxed{\xi = 2 \cos(u)},$$

obtém-se

$$\boxed{P(\xi) = (\xi + 2)(\xi + c_0)^2}$$

$$\therefore P(\xi) = \xi^3 + 2(1 + c_0)\xi^2 + c_0(4 + c_0)\xi + 2c_0^2.$$

Inferre-se, portanto, que

$$\boxed{P(u) = 8 \cos^3(u) + 8(1 + c_0) \cos^2(u) + 2c_0(4 + c_0) \cos(u) + 2c_0^2}.$$

Os nulos correspondem, então, a

$$\boxed{\text{nulos}} \mapsto \boxed{\begin{matrix} \xi = -2 \\ \xi = -c_0 \end{matrix}}.$$

O máximo global (do lobo principal) corresponde a

$$\boxed{\begin{matrix} \text{máximo} \\ \text{global} \end{matrix}} \mapsto \boxed{\xi = 2} \mapsto \boxed{P_{\max} = 4(2 + c_0)^2}.$$

Os máximos locais (dos lobos secundários) correspondem a

$$\frac{dP}{d\xi} = (\xi + c_0)(3\xi + c_0 + 4) = 0 \Rightarrow \boxed{\xi_1 = -\frac{1}{3}(4 + c_0)}$$

$$\boxed{P_1 = P(\xi_1) = \frac{4}{27}(2 - c_0)^3}.$$

Assim

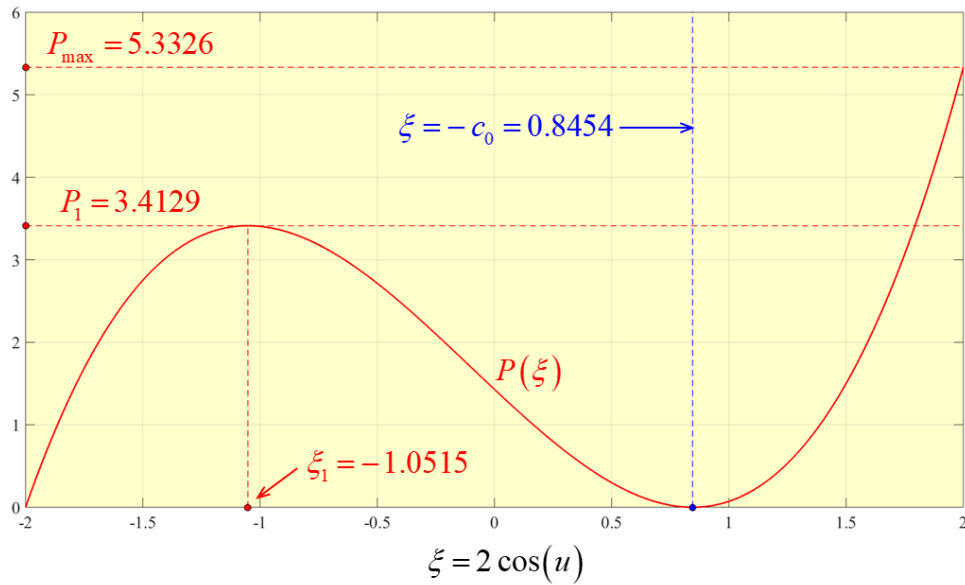
$$\boxed{R^2 = \frac{P_{\max}}{P_1} = 27 \frac{(2 + c_0)^2}{(2 - c_0)^3}} \Rightarrow \boxed{R^2 (2 - c_0)^3 = 27 (2 + c_0)^2}$$

$$\boxed{R = 1.25} \Rightarrow \boxed{c_0 = -0.8454} \Rightarrow \boxed{A = 1 + c_0 = 0.1546}$$

$$\therefore \boxed{\xi_1 = -1.0515}$$

$$\boxed{\begin{matrix} P_{\max} = 5.3326 \\ P_1 = 3.4129 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \mathcal{G}_{\max} = 2.3092 \\ \mathcal{G}_1 = 1.8474 \end{matrix}}.$$

Começemos por representar a função $P(\xi)$ – ver a figura anexa seguinte.



b) O domínio visível corresponde ao intervalo

$$0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ.$$

Vem, deste modo,

$$u = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos(\phi) - \alpha$$

$$\boxed{\alpha = 0} \Rightarrow \begin{cases} \phi = 180^\circ & \mapsto u_1 = -2\pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) \\ \phi = 0^\circ & \mapsto u_2 = 2\pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) \end{cases}$$

Logo, fazendo

$$\xi_x = 2 \cos \left[2\pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) \right] = 2 \cos(u_1) = 2 \cos(u_2),$$

terá de ser

$$\boxed{P_{\text{front}} = P_{\text{rear}} = P_x = P(\xi_x) = 1},$$

donde

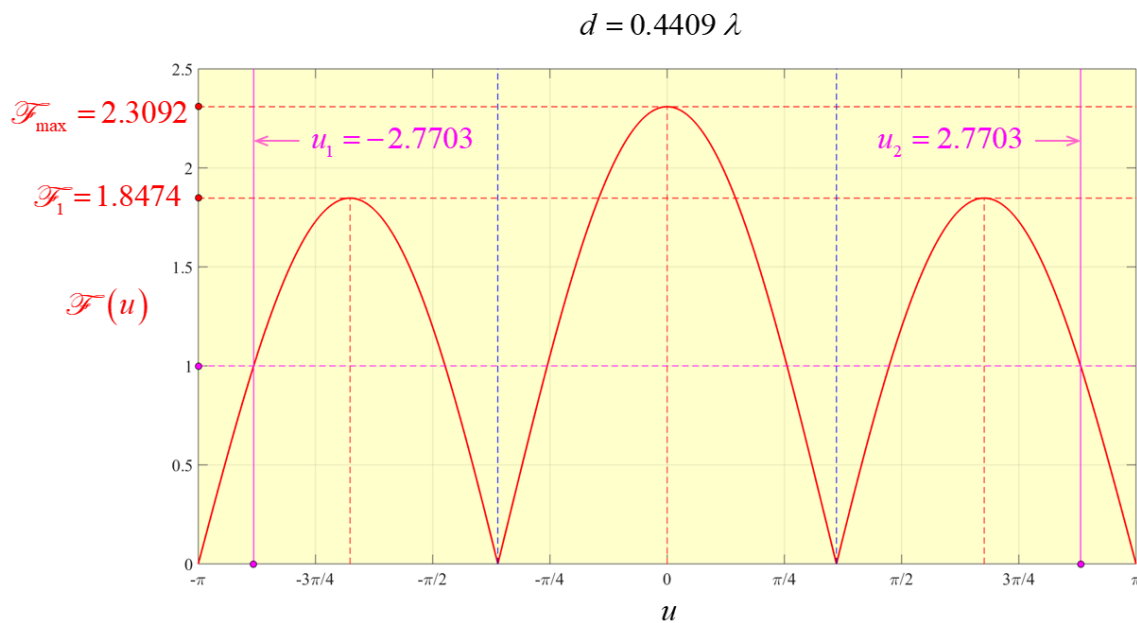
$$P_x = \xi_x^3 + 2(1+c_0)\xi_x^2 + c_0(4+c_0)\xi_x + 2c_0^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\xi_x = -1.8637}$$

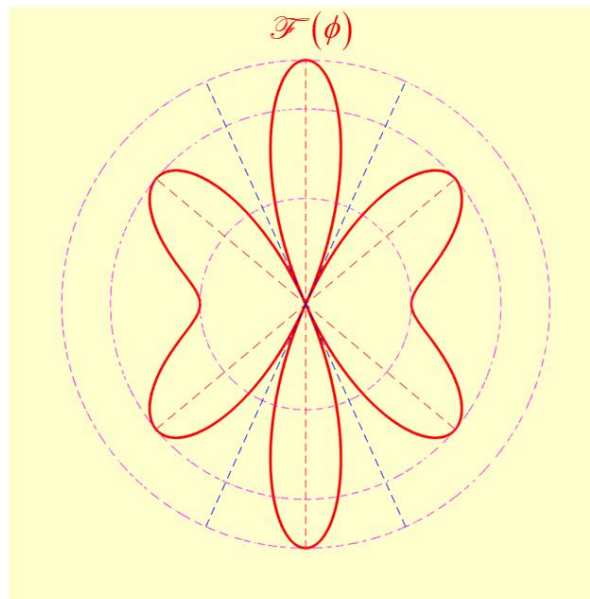
domínio visível	↦	$u_1 = -\cos^{-1}\left(\frac{\xi_x}{2}\right) = -2.7703$ $u_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\xi_x}{2}\right) = 2.7703$
--------------------	---	---

Infere-se daqui, finalmente, que deverá ter-se

$$\boxed{\frac{d}{\lambda} = \frac{u_2}{2\pi} = 0.4409}$$

c) Vejamos, agora, o diagrama de radiação.





**máximos
locais**

↦

$$\begin{aligned} \phi_{m1} &= 39.9288^\circ \\ \phi_{m2} &= 90^\circ \text{ (máximo global)} \\ \phi_{m3} &= 140.0712^\circ \end{aligned}$$

nulos

↦

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 65.8282^\circ \\ \phi_2 &= 114.1718^\circ \end{aligned}$$